Εισαγωγή στην Τοπολογία, 8/6/2018, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (1,5 μον.)
Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική και το σύνολο $A = (-3, 1] \cup \{2\}$. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα (με πλήρη αιτιολόγηση):
(α) Είναι το A ανοικτό; Είναι το A κλειστό;
(β) Να υπολογιστούν το εσωτερικό του A, η κλειστή θήκη του A, το σύνορο του A και το παράγωγο σύνολο του A.

Θέμα 2. (1,5 μον.)
Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος για τον οποίο ισχύει ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε η ανοικτή μπάλα $B_\rho(x, \varepsilon_x)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Να δείξετε ότι κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό.

Θέμα 3. (1,5 μον.)
Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και A ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του X. Να δείξετε ότι:
(α) $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.
(β) Αν το A είναι συμπαγές τότε υπάρχουν $a, \beta \in A$ ώστε $\mathrm{diam}(A) = \rho(a, \beta)$.

Θέμα 4. (1,5 μον.)
(α) Πότε ένας μετρικός χώρος (X, ρ) καλείται συνεκτικός; Πότε ένα υποσύνολο $A \subseteq X$ λέγεται συνεκτικό;
(β) Να δείξετε ότι ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι συνεκτικός αν και μόνο αν δεν υπάρχει συνάρτηση $f : X \to \{0, 1\}$ συνεχής και επί.
(γ) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε το A να μην είναι διάστημα. Δείξτε ότι το A δεν είναι συνεκτικό.

Θέμα 5. (2,5 μον.)
Έστω (X, ρ), (Y, d) δύο μετρικοί χώροι. Θέτουμε $Z = X \times Y$ και ορίζουμε $\sigma : Z \times Z \to \mathbb{R}$ με $\sigma\Big((x, y), (x', y')\Big) = \rho(x, x') + d(y, y')$.
(α) Δείξτε ότι η σ είναι μετρική στο Z.
(β) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο X, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο Y, $x \in X$ και $y \in Y$, δείξτε ότι $(x_n, y_n) \xrightarrow{\sigma} (x, y)$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{d} y$.
(γ) Δείξτε ότι αν οι μετρικοί χώροι (X, ρ) και (Y, d) είναι πλήρεις, τότε ο (Z, σ) είναι πλήρης.
(δ) Δείξτε ότι αν οι μετρικοί χώροι (X, ρ) και (Y, d) είναι συμπαγείς, τότε ο (Z, σ) είναι συμπαγής.

Θέμα 6. (2 μον.)
Έστω (X, ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μια συνάρτηση συστολής (δηλ. υπάρχει $M < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq M\rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$).
(α) Δείξτε ότι το X είναι φραγμένο (ή ισοδύναμα ότι $\mathrm{diam}(X) < +\infty$).
(β) Δείξτε ότι $\mathrm{diam}\left(f^n(X)\right) \to 0$ (όπου $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$).
(γ) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = \{x_0\}$ και ότι $f(x_0) = x_0$.